UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS GEOLÓGICAS

MECÁNICA DE ROCAS

TEMA X

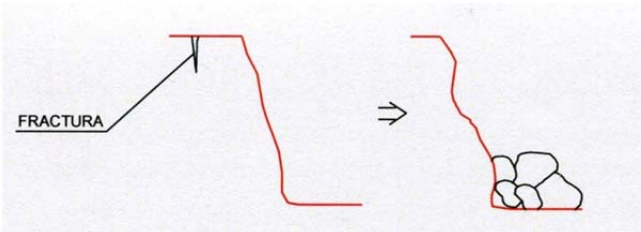
PLASTICIDAD Y ROTURA

Francisco J. Castanedo Navarro

Ingeniero de Caminos

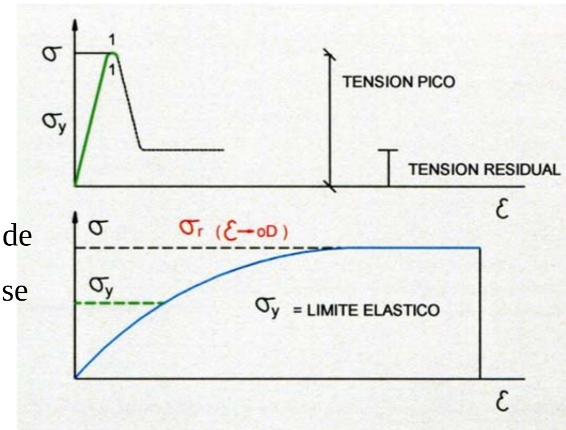
UCM

- Se entiende por “**rotura**” cuando el sólido no puede soportar las cargas actuantes, con lo que se disgrega el mismo y pasa parte de la energía de deformación a energía de movimiento.



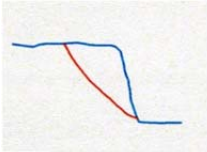
“**Fractura**” es la formación de planos de separación en la roca.

Rotura
- Frágil: Se alcanza un umbral, y pasado éste se pierde la resistencia.
- Dúctil: Superado el umbral, el incremento de deformaciones es tanto mayor cuanto más se supere el citado umbral

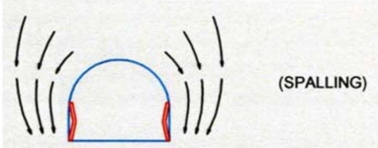


Mecanismos De rotura

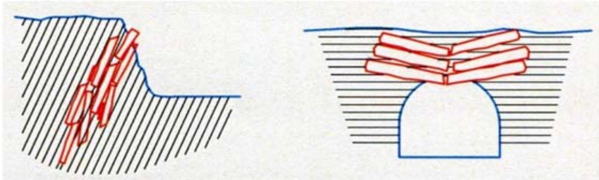
- Rotura por cortante



- Rotura por compresión

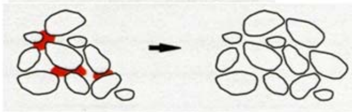


- Rotura por flexión



- Rotura por tracción

- Rotura por colapso o equicompresión



Rotura de enlaces en medios cementados poco densos.

- Se entiende por “**plastificación” cuando el sólido alcanza deformaciones no recuperables.**

Desde el punto de vista teórico se deben abordar igual **“rotura”** y **“plastificación”**. DENOMINÁNDOLO EN GENERAL COMO **“CRITERIO DE ROTURA”**.

<u>CRITERIO DE ROTURA</u>

Función escalar en el espacio de tensiones que indica el umbral de un operador a partir del cual no es aplicable el criterio elástico.

$$Operador \qquad \int (\sigma_{ij}) \leq 0$$

Superficie de fluencia= Superficie de rotura.
Se denomina F.

Campo de velocidades o ley de fluencia

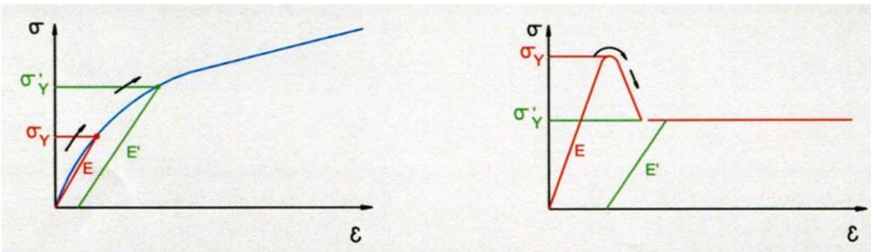
Indica la dirección y magnitud de las deformaciones plásticas que no pueden determinarse por el método elástico.

Ley de fluencia-**Función vectorial que relaciona**
- Incremento de deformaciones con tiempo
- Gradiente de: Función escalar isótropa adimensional denominada potencial plástico.

Se denomina G o Q

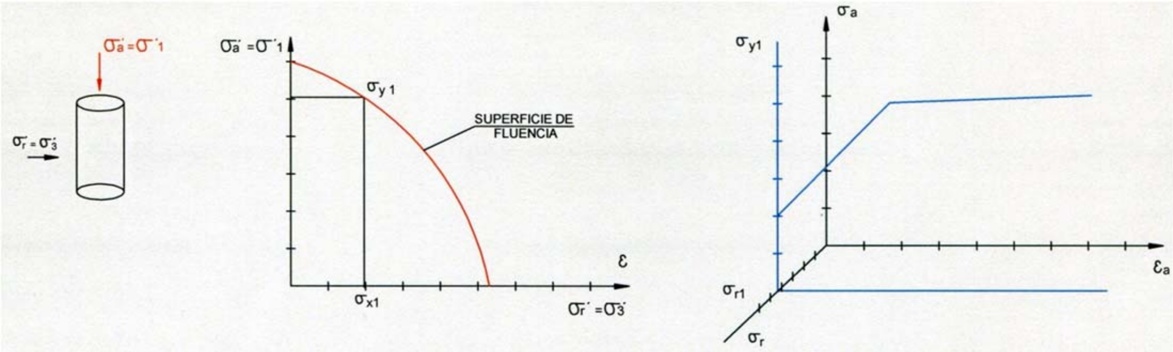
Criterio de rigidización o reblandecimiento

Al producirse deformaciones plásticas se modifican los parámetros elásticos y el criterio de rotura.



ROTURA
- -Criterio de rotura
- -Ley de fluencia
- -Criterio de rigidización

Superficie de fluencia



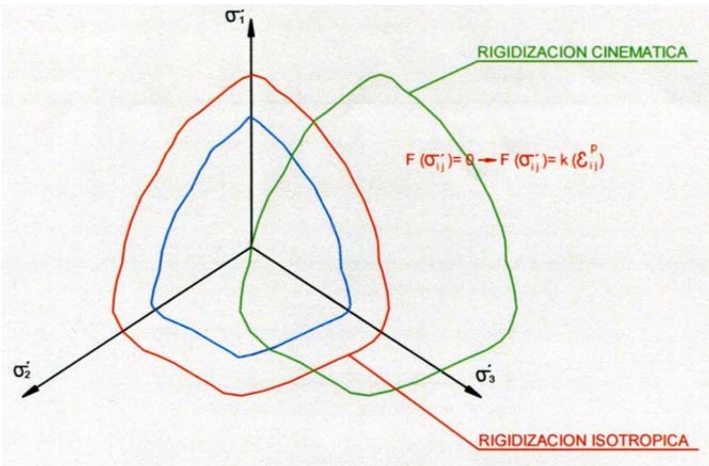
Criterio de rigidización

Se asume que la deformación total puede descomponerse en dos componentes, **Elástica y Plástica.**

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^{e} + d\varepsilon_{ij}^{p}$$

El criterio de rotura considerando rigidización puede representarse:

$$F\left(\sigma_{ij}^{'}, \varepsilon_{ij}^{p}\right) = 0 \quad \rightarrow Dependencia\ del\ criterio\ de\ las\ deformaciones\ plásticas$$



$$Si\ \ k\left(\varepsilon_{ij}^{p}\right) \qquad función\ de\ trabajo\ plástico\ \rightarrow modelos\ rigidizables$$

$$por\ trabajo\ "work - hardening"$$

$$Trabajo\ plástico \quad \sum \sigma_{ij}^{'}\ x\ \varepsilon_{ij}^{p}$$

$Si\ \ k(\varepsilon_{ij}^{p}) \qquad función\ escalada\ de\ deformaciones\ \rightarrow "Strain - hardening"$

$Para\ un\ material\ perfectamente\ plastico\ \ k(\varepsilon_{ij}^{p}) = 0$

En el caso de material rigidizable debe cumplirse **que no hay incrementos de deformación** para carga neutra:

Esta condición se satisface si:

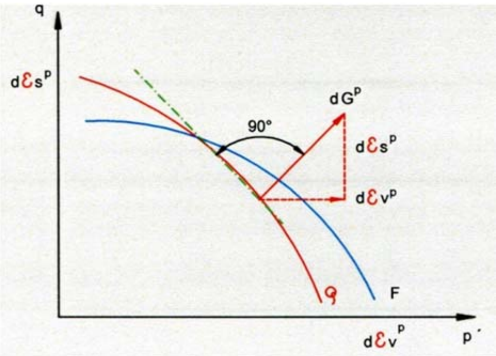
$d\varepsilon_{ij}^{p} = \lambda_{ij}\ x\ d\ F$

λ_{ij}= Tensor simétrico depende
- Tensiones (no de sus incrementos)
- Historia de tensiones

Los componentes de este tensor pueden expresarse:

$$\lambda_{ij} = h\ \frac{\partial G}{\gamma \sigma'_{ij}} \Rightarrow\ d\varepsilon_{ij}^{p} = h\ \frac{\partial G}{\partial \sigma'_{ij}}\ x\ dF$$

$Vector\ \varepsilon_{ij}^{p}\ \ \perp\ \ a\ \ \ G = 0\ \ \ \ en\ el\ punto\ de\ intersección\ con\ \sigma'_{ij} \rightarrow Ley\ de\ fluencia$



Si h ⇔Influencia historia de tensiones

⇓

G función de tensiones

⇓

POTENCIAL PLÁSTICO

Si F= G Caso de **Fluencia Asociada**

Si F≠G **Fluencia no Asociada**

<u>Ley de normalidad</u>

Postulados de estabilidad de Druker (1959)

- Durante la aplicación de cargas, el trabajo realizado por acciones externas en positivo.
  $d\sigma'_{ij}\left(d\varepsilon_{ig}^{e} + d\varepsilon_{ij}^{p}\right) \geq 0$ [1]
- El trabajo plástico en un ciclo de carga es cero o positivo.
  $d\sigma'_{ij}\ x\ d\varepsilon_{ij}^{p} \geq 0$ [2]

De [1] la superficie de fluencia debe ser convexa.

De [2] el vector incremento de deformación plástica es ⊥ a superficie de fluencia.

Si consideramos:

$\dot{\sigma}, \dot{\varepsilon} = d\sigma$ y $d\varepsilon = \Delta\sigma\ y\ \Delta e$

$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^{e} + \dot{\varepsilon}^{p} \Rightarrow \dot{\sigma} = D^{e} : (\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^{p})$ $\quad (: Producto\ matricial)$

D^e: Tensor elástico

a:Vector ⊥ a la línea de fluencia

$$a = \frac{\partial F}{\partial \sigma}$$

r: vector ⊥ al potencial plástico G

$$r = \frac{\partial G}{\partial \sigma}$$

Para plasticidad asociada a=r F=G

VALOR DE LA DEFORMACIÓN PLÁSTICA

$$Sí\ F = F(\sigma, \quad q) \Rightarrow \dot{F} = \frac{\partial F}{\partial \sigma} : \dot{\sigma} + \frac{\partial F}{\partial q} : \dot{q} = a : D^{e} : (\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^{p}) + \frac{\partial F}{\partial q} : \dot{q}$$

$Pero\ \ \dot{\varepsilon}^{p} = d\lambda\ x\ r(\sigma, q)$

- dλ: Escalar que define amplitud
- r: Vector que describe la dirección

$\dot{F} = a : D^e : (\dot{\varepsilon} - d\lambda\, x\, r) + \frac{\partial F}{\partial q} : d\lambda h = 0 \Rightarrow ya\ que\ las\ tensiones\ se\ mantienen$ **dentro de la superficie de fluencia durante la deformación plástica.**

El segundo sumando corresponde a considerar una ley de endurecimiento del tipo:

$\dot{q} = d\lambda h(\sigma, q) \rightarrow h\!: función\ de\ endurecimiento$

En todos los casos λ: magnitud de la deformación plástica

Luego de la igualdad anterior:

$$d\lambda = \frac{a : D^e : \dot{\varepsilon}}{(a : D^e : r) - \frac{\partial F}{\partial q} : h}$$

La matriz o tensor elastoplástico será:

$$\dot{\sigma} = D^e : (\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^p) = D^e : (\dot{\varepsilon} - d\lambda\, x\, r) = D^e \left[\dot{\varepsilon} - r \frac{a : D^e : \dot{\varepsilon}}{(a : D^e : r) - \frac{\partial F}{\partial q} : h} \right] = D^{ep} : \dot{\varepsilon}$$

En caso de elastoplasticidad perfecta sin ley de endurecimiento (h=0)

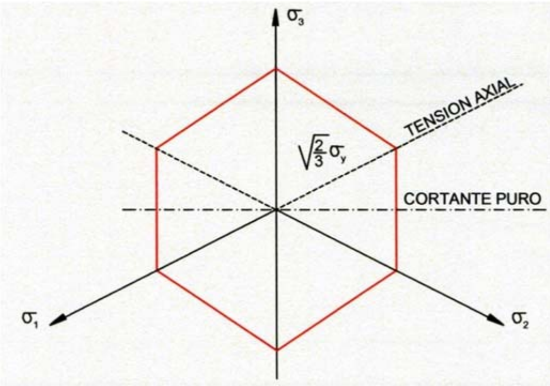
$$D^{ep} = \left[D^e - \frac{D^e : r : a : D^e}{a : D^e : r} \right] \qquad Sí\ a \neq r \quad Matriz\ no\ simétrica$$

CRITERIOS DE ROTURA

Criterio de Tresca

Limita el cortante

$\sigma_1 - \sigma_3 \leq \sigma_y$ σ_y: Tensión de rotura



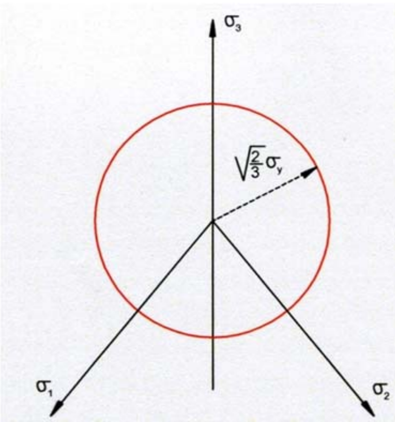
$F(\sigma) = \sigma_1 - \sigma_3 - \sigma_y$

Dominio elástico

$F(\sigma) \geq 0$ $\sigma_1 - \sigma_3 - \sigma_y < 0$

Criterio de Von Mises

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_1\sigma_3 - \sigma_2\sigma_3 \leq \sigma_y^2 \Leftrightarrow I_1^2 - 3I_2 \leq \sigma_y^2$$



$F(\sigma) = I_1^2 - 2I_2 - \sigma_y^2$

Dominio elástico

$\sigma_y^2 - I_1^2 + 2I_2 > 0$

Recordamos:

I_1, I_2, I_3: Invariantes tensor de tensiones

0, J_2, J_3: Invariantes tensor desviador

$$J_2 = \frac{1}{3}I_1^2 - I_2$$

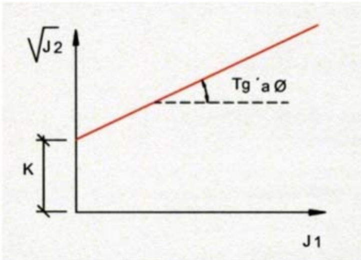
$$J_3 = \frac{2}{27}I_1^3 - \frac{1}{3}I_1I_2 + I_3 = I_3 - I_2\, x\, p + \, 2p^3$$

$$Siendo\;\; p = \frac{I_1}{3}$$

CRITERIO DE DRUCKER - PRAGER

Superficie de fluencia

$$f(\sigma) = a_{\emptyset} I_1 + \sqrt{J_2} - k = 0$$



a_{ϕ}, k: Propiedades del material

(Para $a_{\phi}=0 \rightarrow$Criterio de Von Mises)

Ley de fluencia

Para plasticidad asociada r≅a

$$a_{ij} = a_{\emptyset}\delta_{ij} + \frac{1}{2\sqrt{J_2}} S_{ij} = \frac{\partial F}{\partial \sigma}$$

δ_{ij}:Delta de Dirac. $S_{ij}=1$ $S_{ij}=0$

$S_{ij}= \tau_{xy}$

Para plasticidad no asociada, suponemos una superficie del potencial plástico del tipo:

$$\frac{\partial G}{\partial \sigma} = r \rightarrow r_{ij} = \frac{\partial G}{\partial \sigma_{ij}} = a_{\Psi}\delta_{ij} + \frac{1}{2\sqrt{J_2}}\, x\, S_{ij}$$

Esta ley es asociada en la componente desviadora y no asociada en la volumétrica ($a_{\Psi} \neq a_{\phi}$)

Limitación de tracciones

Puede establecerse en conjunción con criterios Drucker – Prager

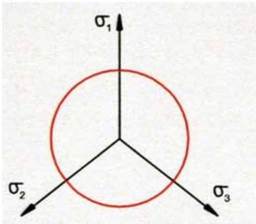
$I_1 \leq I_{1r}$ $\;\; Para\ tensión\ tangencial\ s\ nula$

$$\frac{q}{p} = -\frac{3\sqrt{3J_2}}{I_1} \leq 3 \;\; Se\ limita\ al\ valor\ de\ compresión\ uniaxial$$

$$Ley\ de\ fluencia \qquad F(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{3}} I_1 + \sqrt{J_2} - \frac{1}{\sqrt{3}} I_{1T} = 0$$

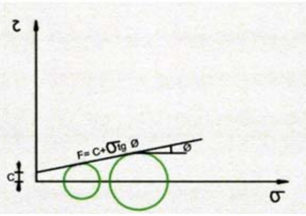
$$Para\ plasticidad\ asociada \qquad r_{ij} = a_{ij} = \frac{1}{\sqrt{3}} \delta_{ij} + \frac{1}{2\sqrt{J_2}} S_{ij}$$

Intersección de criterio Drucker – Prager con plano desviador da un cono



<u>CRITERIO DE MOHR-COULOMB</u>

Establecido por Mohr (1000) – Coulomb (1773)



C: Cohesión

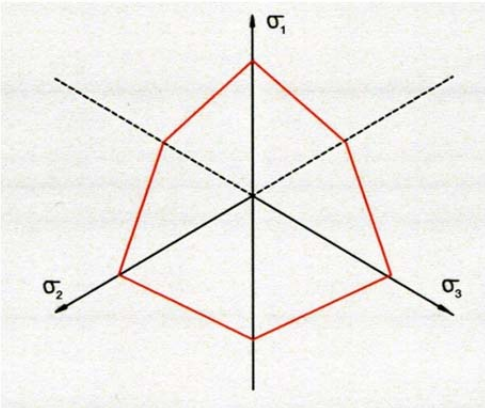
ϕ: Ángulo de rozamiento interno

En función de las tensiones principales:

$$\sigma_1 - \sigma_3 - (\sigma_1 + \sigma_3) sin\emptyset - 2c\ \ cos\emptyset = 0$$

Intersección con plano desviador da un hexágono irregular

En plano desviador (Octaédrico)

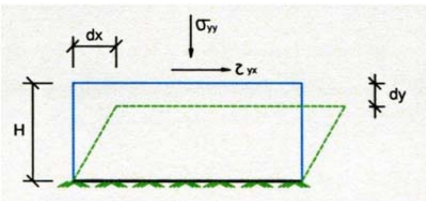


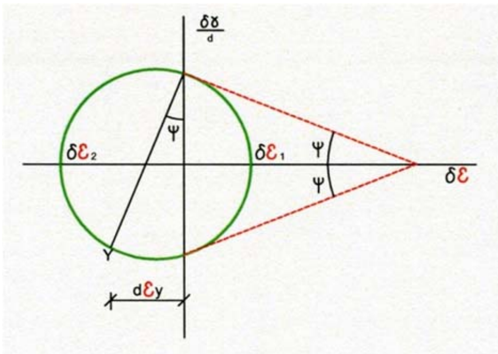
$Si\ se\ considera\ \ \sigma_3 = 0\ \ (compresión\ uniaxial)$ $\qquad \sigma_c = \frac{2c\ \ cos\emptyset}{1 - sen\emptyset}$

$y\ la\ resistencia\ a\ tracción\ en\ extensión\ uniaxial$ $\qquad \sigma_T = \frac{2c\ \ cos\emptyset}{1 + sen\emptyset}$

<u>Dilatancia</u>

Las deformaciones plásticas se desarrollan con un incremento de volumen ⇔ Dilatancia





Las deformaciones son:

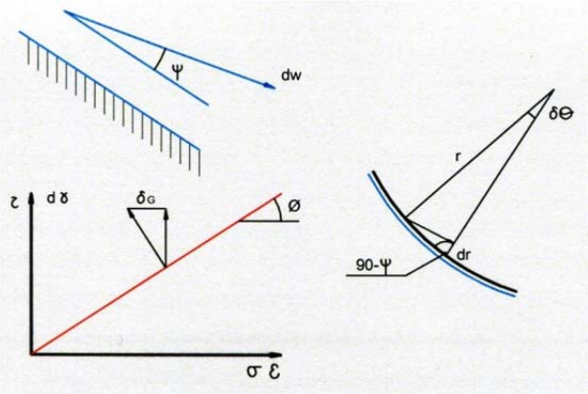
$$d\varepsilon_y = \frac{d\varepsilon_y}{H} \qquad d\gamma_{xy} = \frac{d_x}{H}$$

Pero por la geometría del circulo de Mohr en el plano de acortamiento nulo:

$$tg\Psi = -\frac{d\varepsilon_y}{d\gamma_{xy}} \quad signo\ de\ \Psi\ depende\ de\ d\varepsilon_y\ o\ d_y$$

$$Tambien \quad sin\Psi = -\frac{d\varepsilon_1 + d\varepsilon_3}{d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3}$$

Planos de deslizamiento



$\frac{d_r}{rde} = Tg\Psi$

$r_1 = r_0 \exp(\Delta\theta\ Tg\Psi)$

Espiral logarítmica o recta si:

Ψ=0

Sí Ψ=0 → rectas o Líneas circulares

En plasticidad asociada Ψ=0 → con ϕ=0 (sin drenaje) Rotura circular

CRITERIO DE HOEK Y BROWN

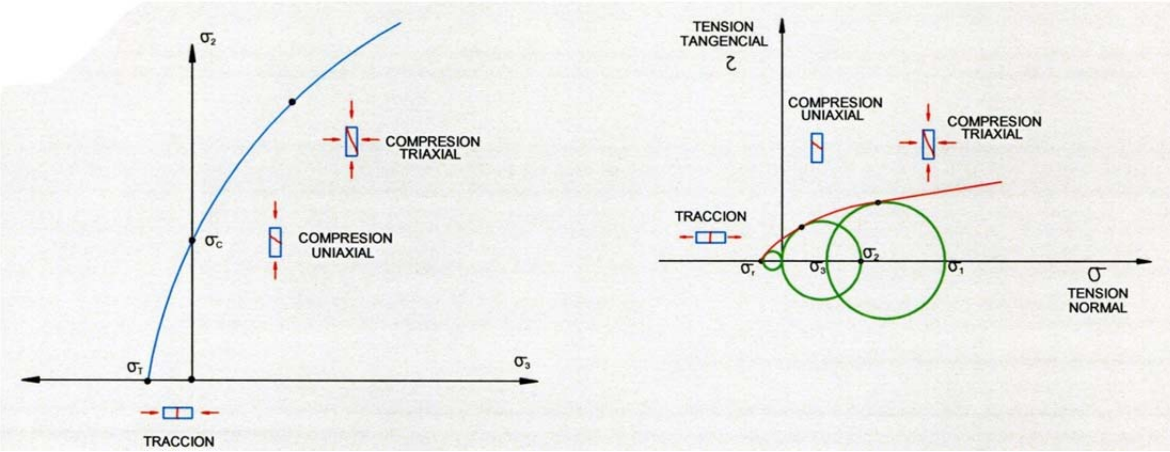
$$\sigma_1 = \sigma_3 + \sqrt{mi\sigma_{ci}\sigma_3 + \sigma_{ci}^2}$$

σ_{ci}: resistencia compresión matriz rocosa

m: Parámetro de tablas o ensayos

$$Tambien \qquad \frac{\sigma_1}{\sigma_{ci}} = \frac{\sigma_3}{\sigma_{ci}} + \sqrt{m_i \frac{\sigma_3}{\sigma_{ci}} + 1}$$

$$La\ resistencia\ a\ tracción \qquad \sigma_T = \frac{1}{2}\sigma_{ci}\left(m_i - \sqrt{m_1^2 + 4}\right) \qquad \sigma_1 = 0 \quad \sigma_3 = \sigma_T$$



$$\tau = A\ x\ \sigma_{ci}\ x\ \left(\frac{\sigma_n - \sigma_{ci}}{\sigma_{ci}}\right)^B$$

A, B: función de m_i

La superficie de fluencia será:

$$F(\sigma) = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_{ci}}\right)^2 + m_i \frac{\sigma_3}{\sigma_{ci}} + 1 = 0$$