UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS GEOLÓGICAS

MECÁNICA DE ROCAS

TEMA VII

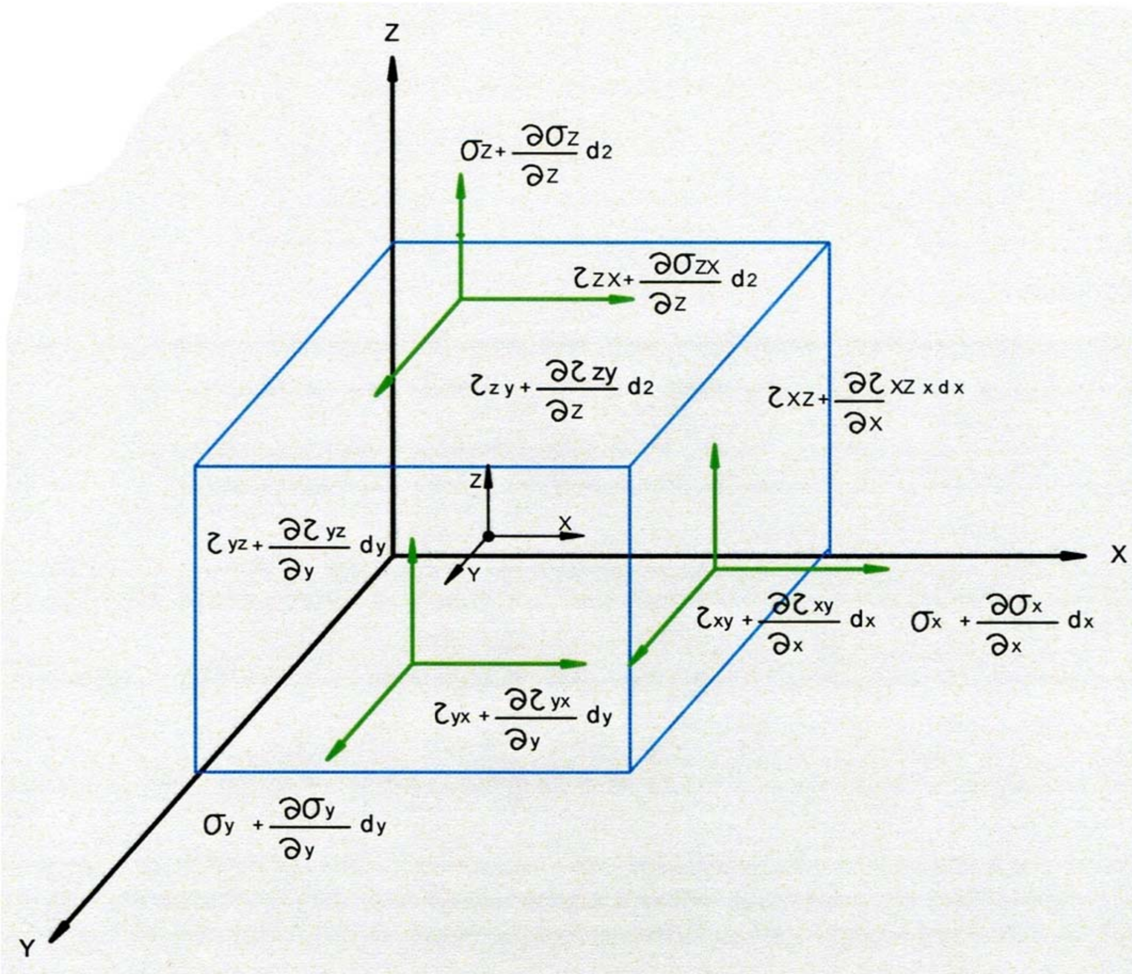
TENSIONES EN ROCA

(TRIDIMENSIONALES)

Francisco J. Castanedo Navarro

Ingeniero de Caminos

UCM



X, Y, Z: Fuerzas por Ud. De volumen

ESTABLECIENDO EQUILIBRIO DE FUERZAS

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial_x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial_y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial_x} + X = 0$$

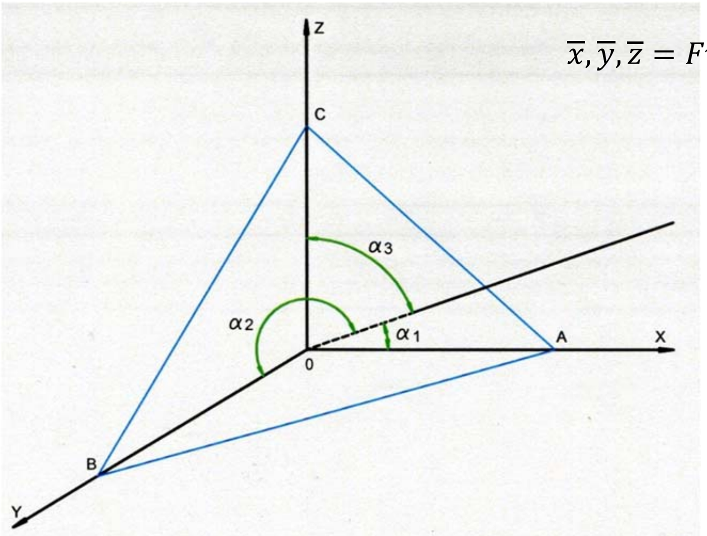
$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial_x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial_y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial_z} + Y = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{x2}}{\partial_x} + \frac{\partial \tau_{y2}}{\partial_y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial_z} + Z = 0$$

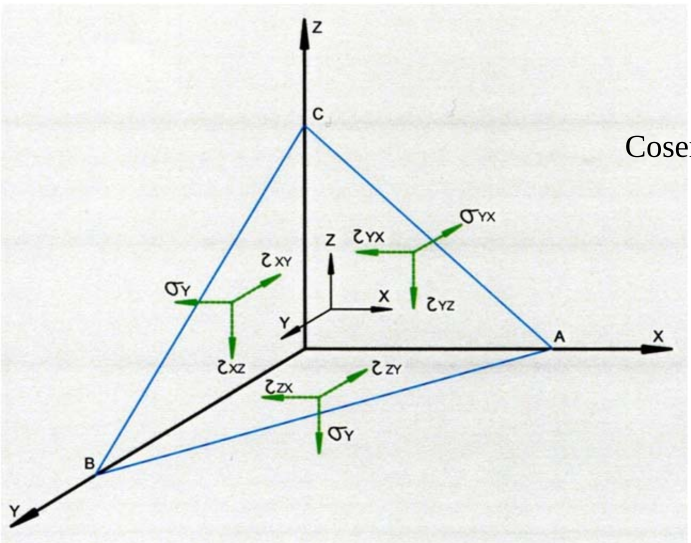
Ecuaciones de equilibrio interno

$$Sí \qquad S_{ii} = \sigma \; y \; S_{ij} = \tau \qquad \rightarrow \; \sum_{i_{zi}}^{3} \frac{\partial s_{ij}}{\partial_{xj}} + x_{ij} = 0 \; (Notación\ tensional)$$

Tomando momentos $\tau_{xy}=\tau_{yx}$ $S_{ij}=S_{ji}$



$\overline{x}, \overline{y}, \overline{z} = Fuerzas\ por\ unidad\ de\ superficie$



Cosenos directores $\begin{cases} l=\cos \alpha_1 \\ m= \cos \alpha_2 \\ n= \cos \alpha_3 \end{cases}$

OBC=ABC x cosα_1=ABC x l

OAC = ABC x cosα_2=ABC x m

OAB=ABC x cosα_3=ABC x n

ESTABLECIENDO EQUILIBRIO DE FUERZAS

$$\sigma_x \, x \, l + \tau_{xy} \, x \; m + \tau_{xz} \, x \, n = \overline{x}$$

$$\tau_{xy} \, x \, l + \sigma_y \, x \; m + \tau_{yz} \, x \, n = \overline{y}$$

$$\tau_{xz} \, x \, l + \tau_{yz} \, x \; m + \sigma_z \, x \, n = \overline{z}$$

$$\bar{x},\bar{y},\bar{z}\ \left\{\begin{array}{l}\textit{Fuerzas en contorno}\\ \textit{Tensiones resultantes en plano}\end{array}\right.$$

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_{nx} \\ p_{ny} \\ P_{nz} \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_n & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yx} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} \text{ x } \begin{Bmatrix} l \\ m \\ n \end{Bmatrix}$$

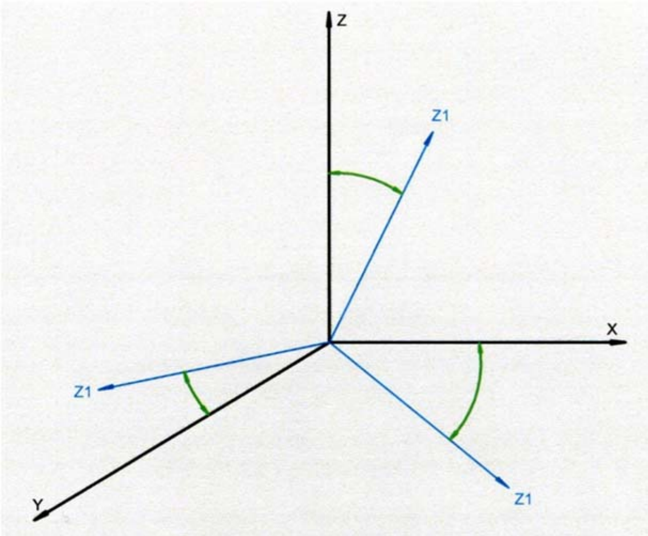
Tensores de tensiones

◯ Valores independientes

Matriz simétrica → Definida positiva (Δ=0 por disipación energía) → Puede mediante pre y post multiplicación diagonalizarse lo que equivale a un movimiento de giro:

$$\begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_< \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{Diagonalizarse}]{} \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{vmatrix}$$

$\sigma_1 = A \text{ x } \sigma \text{ x } A^T$ y $A= \begin{vmatrix} \cos(x_1,x) & \cos(x_1,y) & \cos(x_1,z) \\ \cos(y_1,x) & \cos(y_1,y) & \cos(y_1,z) \\ \cos(z_1,x) & \cos(z_1,y) & \cos(z_1,z) \end{vmatrix}$



$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$: Autovalores

$$\text{Det.} \begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_i & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_i & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{y2} & \sigma Z - \sigma_i \end{vmatrix} = 0$$

ECUACIÓN DE TERCER GRADO

Resolviendo el determinante

$$\sigma_i^3 - I_1 \sigma_i^2 + I_2 \sigma_1 - I_3 = 0$$

ECUACIÓN CARACTERISITICA

Se obtiene

$\sigma_1 \ \sigma_2 \ \sigma_3$

Invariable

$$\begin{cases} I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \\ I_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{zy}^2 \\ I_3 = \sigma_x \sigma_y \sigma_z - \sigma_x \tau_{zy}^2 - \sigma_y \tau_{xz}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2 - 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{xz} \end{cases}$$

En función de las tensiones principales

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

$$I_2 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_1 \sigma_3$$

$$I_3 = \sigma_1 \, \sigma_2 \, \sigma_3$$

PLANO OCTAÉDRICO

$$P = \sigma_{oct} = \frac{1}{3}\left(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_2\right) = \frac{1}{3}\ I_1$$

$$\acute{A}ngulo\ de\ \ arc.cos\sqrt{\frac{1}{3}}\ con\ direcci\acute{o}n\ principal$$

$$\tau_{oct} = \sqrt{\frac{1}{3}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} = \pm\sqrt{\frac{2}{9}[I_1^2 - 3I_2]}$$

Sí $\sigma_2=\sigma_3 < \sigma_1$, resulta:

$$P = \frac{1}{3}\left(\sigma_1 + 2\sigma_3\right)$$

$$\tau_{oct} = (\sigma_1 - \sigma_3)x\sqrt{\frac{2}{3}}$$

TENSIÓN VOLUMÉTRICA Y DESVIADORA

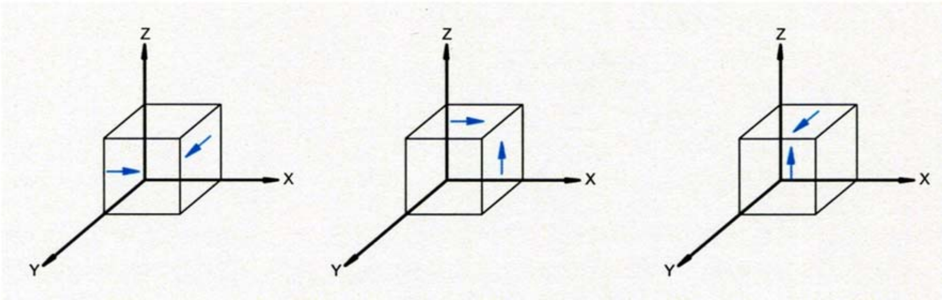
$$\sigma = \begin{vmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & P \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x\text{-}P & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y\text{-}P & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z\text{-}P \end{vmatrix}$$

Tensor volumétrico	Tensor desviador
(Variación volumen)	(Variación de forma)

Llamando:

$S_x = \sigma_x\text{-}P$ $\quad$ $S_y = \sigma_y\text{-}P$ $\quad$ $S_z = \sigma_2\text{-}P$

$$\begin{vmatrix} S_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & S_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & S_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \tau_{xz} & 0 \\ \tau_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau_{xz} & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{yz} \\ 0 & \tau_{yz} & 0 \end{vmatrix}$$



$$+ \begin{vmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & -S_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -S_z & 0 \\ 0 & 0 & S_z \end{vmatrix}$$