UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS GEOLÓGICAS

MECÁNICA DE ROCAS

TEMA VIII

DEFORMACIONES

Francisco J. Castanedo Navarro

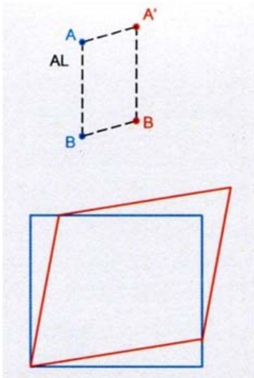
Ingeniero de Caminos

UCM

- Deformación Longitudinal:

    + Acortamiento

    -Alargamiento



- Deformación tangencial

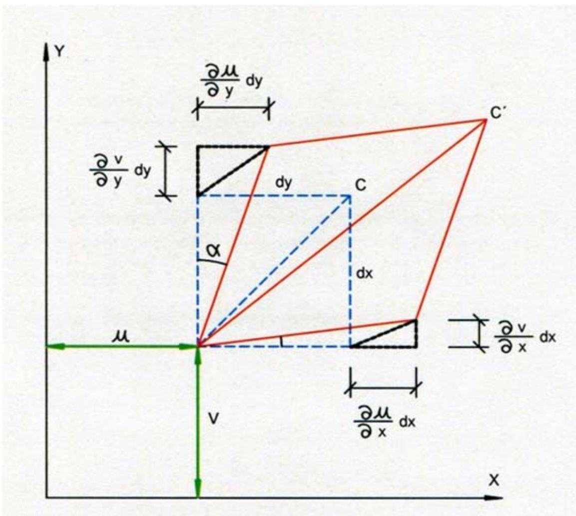
    γ_{xy}, γ_{yx}

    + Si cierra el ángulo.

    -Si abre el ángulo.

<u>DESPLAZAMIENTOS Y DEFORMACIONES</u>

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$



$$tg\beta = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} d_x}{\left(1+\frac{\partial u}{\partial x} d_x\right)}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} \ll< ..1$$

$$\beta = tg\beta = \frac{\partial v}{\partial x}$$

Igual

$$\propto = \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\gamma_{xy} = \propto + \beta = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \rightarrow Igual \quad \gamma_{zy} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial y}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

ECUACIONES DE COMPATIBILIDAD

ε_x, ε_y, ε_z, γ_{xy}, γ_{xz}, γ_{yz} → Solo "3" Independientes

Diferenciando:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial_{y2}} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial_{x2}} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial_x \partial_y} \qquad \frac{2\partial^2 \varepsilon_x}{\partial_z \partial_y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \gamma_{zy}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right)$$

INVARIANTES EN DEFORMACIONES

*Hay 3 direcciones ortogonales con solo deformaciones longitudinales.

*Los valores de estas deformaciones longitudinales son las raíces de la ecuación:

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y - \varepsilon & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z - \varepsilon \end{vmatrix} = 0$$

O bien: las raíces de la ecuación de 3er grado.

$$\varepsilon^3 - E_1\varepsilon^2 + E_2\,\varepsilon - E_3 = 0$$

Siendo:

$$E_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

$$E_2 = \varepsilon_x\varepsilon_y + \varepsilon_x\varepsilon_z + \varepsilon_y\varepsilon_z - \frac{1}{4}\left(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{xz}^2 + \gamma_{yz}^2\right) = \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_3 + \varepsilon_2\varepsilon_3$$

$$E_3 = \varepsilon_x\varepsilon_y\varepsilon_z - \frac{1}{4}\left(\varepsilon_x\gamma_{yz}^2 + \varepsilon_y\gamma_{xz}^2 + \varepsilon_z\gamma_{xy}^2\right) + \frac{1}{4}\gamma_{xy}\gamma_{yz}\gamma_{xz} = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3$$

Las direcciones de las deformaciones principales pueden obtenerse resolviendo el sistema.

Para la dirección principal "i"

$$2(\varepsilon_x-\varepsilon_i) \times l_{xi} + \gamma_{xy} \times l_{yi} + \gamma_{xz} \times l_{zi} = 0$$

$$\gamma_{xy} l_{xi} + 2(\varepsilon_y - \varepsilon_i) \times l_{yi} + \gamma_{zi} \times l_{zi} = 0$$

$$\gamma_{xz} l_{xi} + \gamma_{zy} \times l_{yi} + 2(\varepsilon_z - \varepsilon_i) \times l_{zi} = 0$$

Siendo l_{ij}: cosenos directos del Nuevo eje "I" respecto al antiguo eje "j".

DEFORMACIÓN ESFÉRICA Y DESVIADORA

El cambio de volumen es: $\varepsilon_v = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = E_1$ (1^{er} Invariante deformaciones)

Tensor deformaciones:

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{\varepsilon} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\varepsilon} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\varepsilon} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_x - \bar{\varepsilon} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y - \bar{\varepsilon} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z - \bar{\varepsilon} \end{vmatrix}$$

$\Downarrow$ Tensor esférico $\Downarrow$ Cambio de volumen Igual en todas Direcciones

$\Downarrow$ Tensor desviador $\Downarrow$ Cambio de forma sin Cambio de volumen $\Downarrow$ Invariantes

$D_1=0$

$$D_2 = \frac{1}{3}\, x\, E_1^2 - E_2$$

$$D_3 = E_3 - \frac{1}{3}E_2E_1 + \frac{2}{27}E_1^3$$

PLANOS OCTAÉDRICOS

$$Cumplen \qquad \epsilon_{oct} = \frac{1}{3}xE_1 \qquad ¡No\ son\ ortogonales!$$

El valor de la deformación angular es:

$$\gamma_{oct} = \frac{2}{3}\left(\left(\varepsilon_x - \varepsilon_y\right)^2 + \left(\varepsilon_y - \varepsilon_z\right)^2 + (\varepsilon_x - \varepsilon_z)^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{xz}^2 + \gamma_{yz}^2)\right)^{1/2}$$

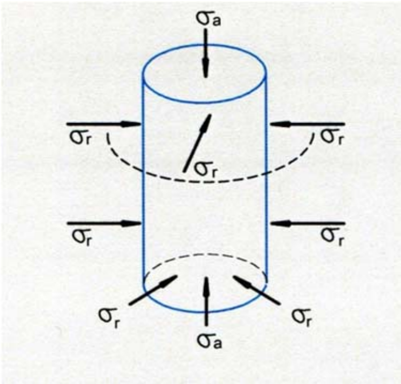
VARIABLES EN TENSIONES Y DEFORMACIONES

Como hemos visto anteriormente, en el plano octaédrico:

$$p = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

$$q = (\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma z \quad)^2 + \frac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_z)^2 + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2))^{1/2}$$

En el caso de ensayo triaxial:



$$p = \frac{1}{3}\ (\sigma_a + 2\sigma_r)$$

$$q = \sigma_a - \sigma_r$$

En deformación, separando cambio de volumen y cambio de forma (¡plano octaédrico!).

$$\varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

$$\varepsilon_s = \frac{1}{3}(2(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + 2(\varepsilon_y - \varepsilon_x)^2 + 2(\varepsilon_x - \varepsilon_z)^2 + 3(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{xz}^2 + \gamma_{yz}^2))^{1/2}$$

Y para el ensayo triaxial:

$$\varepsilon_v = \varepsilon_a + 2\varepsilon_r$$

$$\varepsilon_s = \frac{2}{3}(\varepsilon_a - \varepsilon_r)$$

CIRCULO DE MOHR EN DEFORMACIONES

Se adopta: Deformaciones longitudinales acortamiento **POSITIVAS**

Deformaciones tangenciales positivas **SI EL CORTANTE ES POSITIVO**

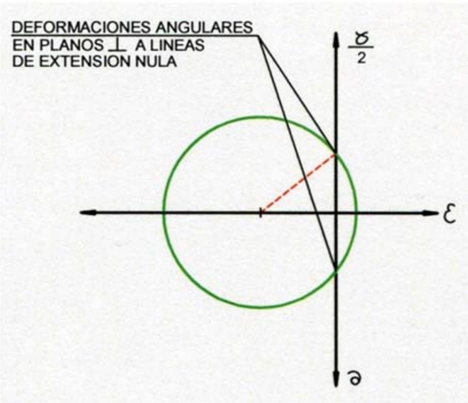
Con nuevo convenio de signos:

$$\varepsilon_i = -\frac{\partial_{vi}}{\partial_i} \qquad \gamma_{ij} = -\left(\frac{\partial_u}{\partial_j} + \frac{\partial_{uj}}{\partial_i}\right) \qquad u_i = Corrimiento\ en\ la\ dirección\ \ i$$

Circulo de Mohr en tensiones $\rightarrow$ Círculo de Mohr en deformaciones

Sustituir $\sigma_i \rightarrow \varepsilon_i$ o $\delta\varepsilon_i$

$$\tau_{ij} \rightarrow \frac{\gamma_{ij}}{2} \quad o \quad \frac{\delta\gamma_{ij}}{2} \quad (\varepsilon_{ij} \quad o \quad \delta\varepsilon_{ij})$$



Los signos deben cambiarse en las deformaciones angulares de direcciones⊥ líneas de extensión nula.

Direcciones en que la deformación longitudinal es nula.

Las direcciones principales de deformación forman con las líneas de extensión nula unos ángulos.

$$\left(\frac{\pi}{4}\right) \pm \left(\frac{\nu}{2}\right)$$

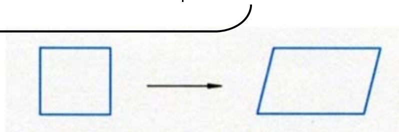
$$sen\ \nu = -\frac{\delta\varepsilon_1 + \delta\varepsilon_3}{\delta\varepsilon_1 - \delta\varepsilon_3} = -\frac{\delta\varepsilon_v}{\delta\gamma_{max}}$$

DESCOMPOSICIÓN DEL TENSOR ESVIADOR

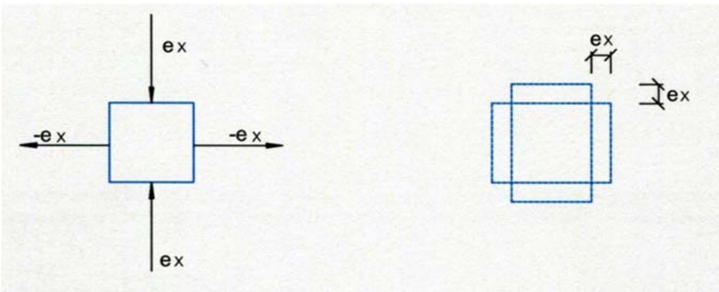
Llamamos $e = \frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z}{3}$ $\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\,\gamma_{xy} \ldots.$ $e_x = \varepsilon_x - e$

El tensor desviador puede descomponerse en cinco sumando:

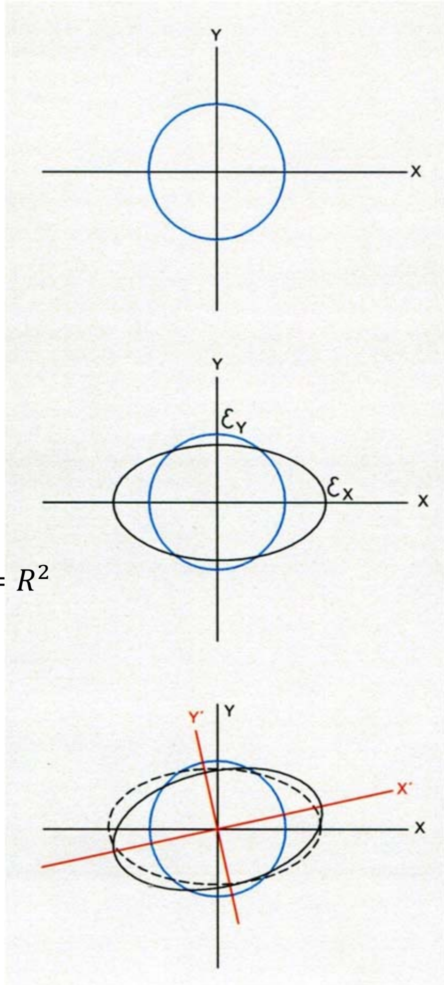
$$\begin{vmatrix} e_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & e_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_z \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & \varepsilon_{xz} \\ 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon_{xz} & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{yz} \\ 0 & \varepsilon_{yz} & 0 \end{vmatrix} +}_{\text{Solo deformación angular}}$$



$$\underbrace{\begin{vmatrix} e_x & 0 & 0 \\ 0 & -e_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e_z & 0 \\ 0 & 0 & e_z \end{vmatrix}}_{\text{Deformación longitudinal sin cambio de volumen}}$$



ELIPSOIDE DE DEFORMACIONES



Si consideramos una esfera de radio infinitesimal

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

Aplicamos las deformaciones longitudinales

Elipse

$$\frac{x^2}{(1+\varepsilon_x)^2} + \frac{y^3}{(1+\varepsilon_y)^2} + \frac{z^2}{(1+\varepsilon_z^2)} = R^2$$

Aplicando las deformaciones angulares

$$\frac{x'^2}{(1+\varepsilon'_x)^2} + \frac{y'^3}{(1+\varepsilon'_y)^2} + \frac{z'^2}{(1+\varepsilon'_z)^2} = R^2$$

ε'_z, ε'_y, ε'_z: Deformaciones longitudinales en nuevos ejes.