UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS GEOLÓGICAS

MECÁNICA DE ROCAS

TEMA IX

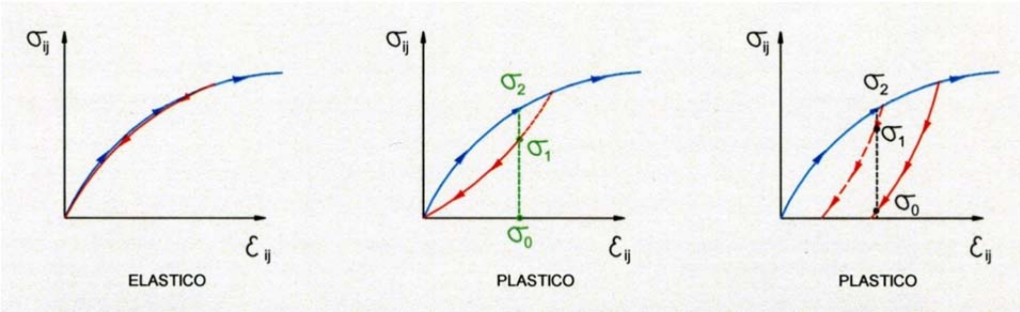
ELASTICIDAD

Francisco J. Castanedo Navarro

Ingeniero de Caminos

UCM

ELASTICIDAD



Material elástico ⟺ Hay una correspondencia biunívoca entre deformaciones y tensiones.

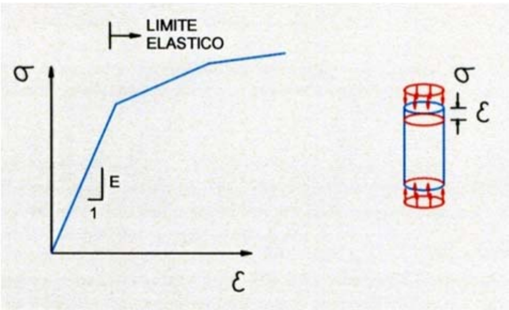
⇓

Conocidas deformaciones

⇓

Pueden obtenerse tensiones ⇒ Independiente de historia.

ELASTICIDAD LINEAL



$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

E= Modulo de Young

Las formulas generales son:

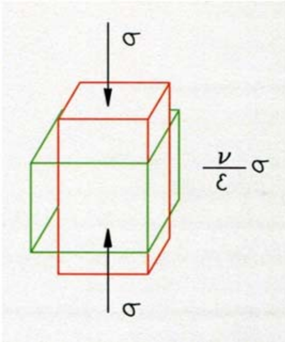
$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\sigma_x - \frac{\upsilon}{E}\sigma_y - \frac{\upsilon}{E}\sigma_z \qquad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

$$\varepsilon_y = -\frac{\upsilon}{E}\sigma_x + \frac{1}{E}\sigma_y - \frac{\upsilon}{E}\sigma_z \qquad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\upsilon}{E}\sigma_x - \frac{\upsilon}{E}\sigma_y + \frac{1}{E}\sigma_z \qquad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\upsilon)} \qquad \textit{Módulo de rigidez o elasticidad transversal}$$

υ=coeficiente de Poisson



Si llamamos:

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \qquad \lambda = \frac{\upsilon E}{(1+\upsilon)+(1-2\upsilon)}$$

Se obtiene:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= \lambda e + 2G\varepsilon_x \\ \sigma_y &= \lambda e + 2G\varepsilon_y \\ \sigma_z &= \lambda e + 2G\varepsilon_z \\ \tau_{xy} &= G\ x\ \gamma_{xy} \\ \tau_{yz} &= G\ x\ \gamma_{yz} \\ \tau_{xz} &= G\ x\ \gamma_{xz} \end{aligned}\right\}$$

ECUACIONES DE LAME´

λ, G : Constante de Lame´

Sumando las tres primeras ecuaciones:

$$(3\lambda + 2G)x\ e = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = E_1 \qquad (1^{er}\ \textit{invariante en tensiones})$$

⇓

Dilatación cubica o esférica ⇐ Constante ⇒ Tensión octaédrica constante

$$\textit{Módulo de compresion.} \qquad k´ = 3\lambda + 2G = \frac{E}{1-2\upsilon}$$

$$Módulo\ volumétrico, \quad k = \frac{E}{3(1-2\upsilon)} = \frac{k´}{3} \qquad \varepsilon_{vol} = \frac{p´}{k} \qquad p´ = octaedrica$$

$$de\ bulbo\ o\ isotropico. \qquad \varepsilon_s = \frac{q´}{3G} \qquad q´ = octaedrica$$

En forma diferencial

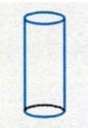
$$d\varepsilon_{vol} = \frac{dp´}{k´} + 0\ x\ dq´$$

$$d\varepsilon_s = 0\ x\ dp´ + \frac{dq´}{3G}$$

$$Sí \quad \upsilon = 0{,}5 \Rightarrow k = \frac{E}{3(1-2\upsilon)} \to \infty \qquad y\ \varepsilon_{vol} = 0 \quad Indepdendiente\ de\ tensión$$

En material incomprensible υ=0,50

Problema (triaxial).



$\sigma_2=\sigma_3$=100kPa

σ_1=300kPa

ε_1=6% $\varepsilon_2=\varepsilon_3$= -1%

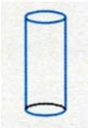
Obtener ε_{vol}, ε_s, E, υ, G y k.

$$\varepsilon_v = \varepsilon_1 + 2\varepsilon_3 = 0{,}06 + 2(-0{,}01) = 0{,}04 \ \to 4\%$$

$$\varepsilon_s = \frac{2}{3}(\varepsilon_1 - \varepsilon_3) = \frac{2}{3}(0{,}06 + 0{,}01) = \frac{0{,}14}{3} = 0{,}0466 \ \to 4{,}67\%$$

$$\left.\begin{aligned} 0{,}06 &= \frac{300}{E} - \frac{\upsilon}{E}(100+100) \\ -0{,}01 &= \frac{100}{E} - \frac{\upsilon}{E}(300+100) \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} E &= 3800kpa \\ \upsilon &= 0{,}35 \end{aligned}$$

<u>Problema (Triaxial).</u>



σ_1=280kPa $\sigma_2=\sigma_3$=0

ε_1=6% $\varepsilon_2=\varepsilon_3$=-1,5%

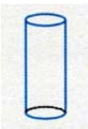
Obtener E, υ, G y k

$$\left.\begin{aligned} 0{,}06 &= \frac{280}{E} - \frac{\upsilon}{E}(0+0) \\ -0{,}015 &= \frac{0}{E} - \frac{\upsilon}{E}(280+0) \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} E &= 4667kpa \\ \upsilon &= 0{,}25 \end{aligned}$$

$$k = \frac{E}{3(1-2\upsilon)} = \frac{4667}{3(1-2x0{,}25} = 3111kPa$$

$$G = \frac{E}{2(1+\upsilon)} = \frac{4667}{2(1+0{,}25)} = 1867\ kPa$$

<u>Problema (Triaxial)</u>



Se mantiene volumen constante $\varepsilon_{vol}= \varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3=0$

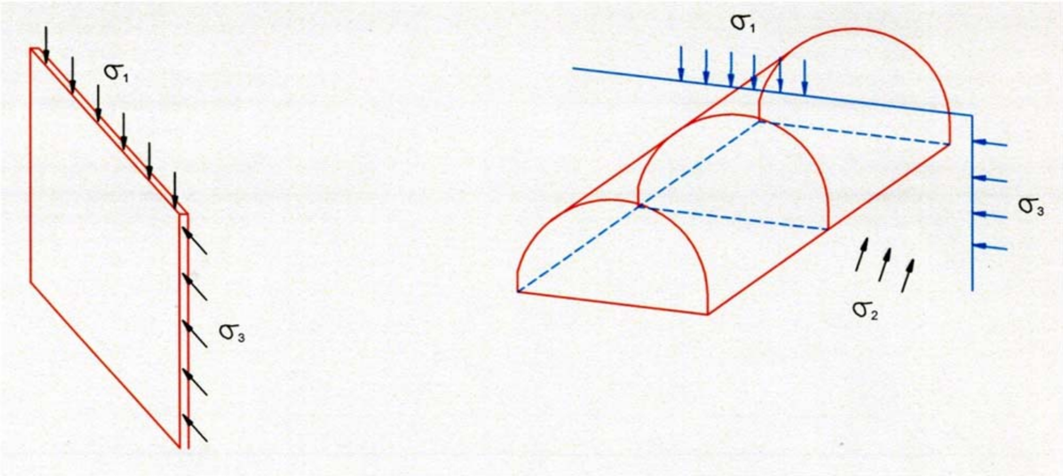
ε_1=5% $\varepsilon_2=\varepsilon_3$

Obtener ε_2, ε_3, E, υ, G y k

<u>CASO PLANO</u>

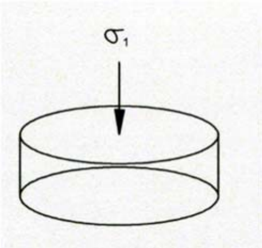
$$En\ tensión\ plana \qquad \sigma_2 = 0 \qquad \varepsilon_2 = \frac{\upsilon}{E}(\sigma_1 + \sigma_3)$$

$$Deformación\ plana \qquad \varepsilon_2 = 0 \qquad \sigma_2 = \upsilon(\sigma_1 + \sigma_3)$$



Tensión plana Deformación plana

EDÓMETRO O COMPRESIÓN EDOMÉTRICA

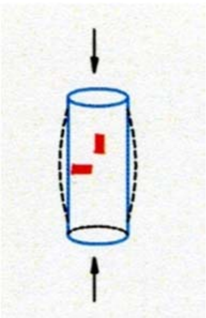


$\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0 \ (Confinamiento\ en\ célula)$

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{D} \qquad D = \frac{E(1-\upsilon)}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)}$$

OBTENCIÓN PARÁMETROS ELÁSTICOS

Módulo de elasticidad E

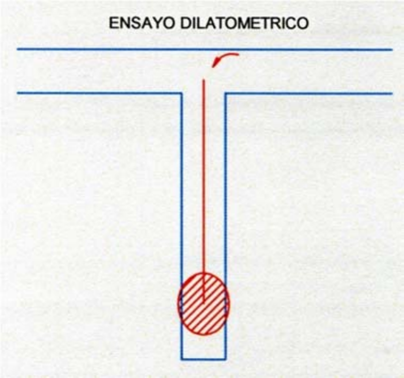


Ensayo de compresión en prensa con medida de deformaciones

$$\sigma_1,\ \ \varepsilon_1 \ \rightarrow \ \ E = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_1}$$

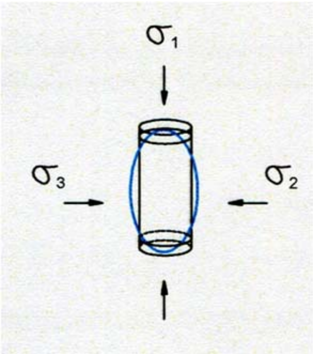
$$Sí\ medimos\ además \qquad \varepsilon_r \rightarrow \upsilon = \frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_1}$$

ENSAYO DILATOMÉTRICO



Pr, $\varepsilon_r \rightarrow E$

ENSAYO TRIAXIAL CON MEDIDA DEFORMACIONES

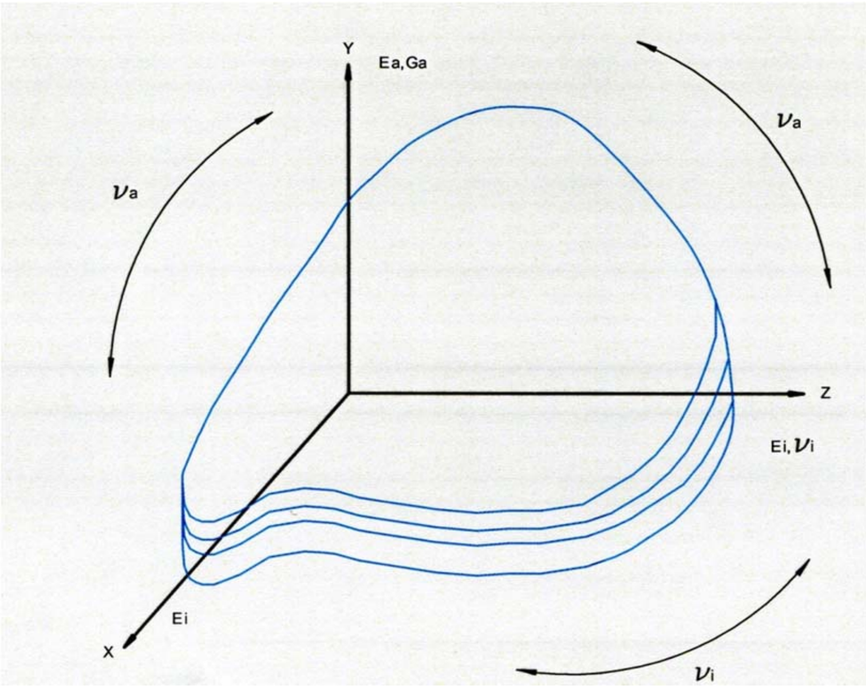


$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \frac{2\upsilon}{E}\sigma_3$$

$$\varepsilon_3 = \frac{\sigma_3}{E} - \frac{\upsilon}{E}(\sigma_1 + \sigma_3)$$

El valor de E puede variar con σ_3.

TERRENO ANISÓTROPO



$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\upsilon_a}{E_a} & -\frac{\upsilon_1}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\upsilon_a}{E_a} & \frac{1}{E_a} & -\frac{\upsilon_a}{E_a} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\upsilon_i}{E_i} & -\frac{\upsilon_a}{E_a} & \frac{1}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{2(1+\upsilon_1)}{E_i} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1}{G_a} & 0 \\ & & & & & \frac{1}{G_a} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}$$

$-1<\upsilon_i<1$

$$\upsilon_a^2 < \frac{1-\upsilon_i}{2} \, x \, \frac{E_a}{E_i}$$

Según Lekhnitskii (1963) y Amadei (1983)

$$\frac{1}{Ga} = \frac{1}{E_a} + \frac{1}{E_i} + \frac{2\upsilon_a}{E_a}$$